Varianta 98

Subiectul I

a) 5. b) 2. c) $(-1,-1),(1,1)$. d) $\vec{v}+\vec{w}=12\vec{j}$. e) 20-30i; f) $9\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. a) 0. b) -1. c) lg10=1$\in$ N . d) x = 3. e) $\frac{13}{26}=\frac{1}{2}$.

2. a) $f'(x)=2007x^{2006}$, $x\in\mathbf{R}$. b) 0 puncte de extreme. c) 1 punct de inflexiune.

d) $f'(1)=2007$. e) $\frac{1}{2008}$.

Subiectul III

a) $x,y\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, deci $x=a+b\sqrt{2}$, $y=c+d\sqrt{2}$, a, b, c, d$\in\mathbf{Z}$. Atunci

$x\cdot y=ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$, deci

$f(xy)=(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=a^2c^2+4abcd+4b^2d^2-2a^2d^2-4abcd-2b^2c^2=$

$=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)=f(x)f(y)$.

b) Fie $x=a+b\sqrt{2}$, a, b$\in\mathbf{Z}$. Atunci $f(x)=0\Leftrightarrow a^2-2b^2=0$, adică $a^2=2b^2$.

Presupunem $a\neq 0$, fie $(a,b)=d$, deci a = dm, b = dn, $(m,n)=1$ si din $a^2=2b^2$ avem $m^2=2n^2$ şi obținem că 2 este divizor comun pentru m, n, deci cotradicție. Atunci $a^2=2b^2$, a, b$\in\mathbf{Z}$ dacă şi numai dacă a = b= 0, adică x = 0.

c) $f(1+\sqrt{2})=1^2-2\cdot 1^2=-1$.

d) Pentru a = 3, b = 2 avem $x=a+b\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ si $a^2-2b^2=1$, deci $x\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$. Dar dacă $x=a+b\sqrt{2}$, $y=c+d\sqrt{2}$, a, b, c, d$\in\mathbf{Z}$ avem $x\cdot y\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, deci $x^n\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, $n\in\mathbf{N}^*$. Adică $x, x^2, x^3, ...\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, şir crescător, deci cu elemente distincte.

e) Se arată asemănător cu d) pentru a = b = 1, $(1+\sqrt{2})^{2n+1}=a_n+b_n\sqrt{2}$,

$a_n^2-2b_n^2=(-1)^{2n+1}=-1$.

f) Calcul direct.

g) „$\subset$” Dacă $z\in U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])$ şi $z'\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ este inversul său, atunci $z\cdot z'=1$, deci $f(z\cdot z')=f(1)$, adică $1=f(z)\cdot f(z')$.

Deoarece $f(z), f(z')\in\mathbf{Z}$, obținem că $f(z)\in\{-1,1\}$, deci $z\in A\cup B$. Aşadar $U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])\subset A\cup B$.

„$\supset$” Dacă $z=a+b\sqrt{2}\in A\cup B$, atunci $f(z)\in\{-1,1\}$.

I. $f(z)=1\Leftrightarrow a^2-2b^2=1\Leftrightarrow(a+b\sqrt{2})\cdot(a-b\sqrt{2})=1$, deci z este inversabil, inversul său fiind

$z'=a-b\sqrt{2}\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

II. $f(z) = -1 \iff a^2 - 2b^2 = -1 \iff \left(a + b\sqrt{2}\right)\cdot\left(a - b\sqrt{2}\right) = -1$, deci z este inversabil, inversul său fiind $z' = -a + b\sqrt{2} \in \mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

În ambele cazuri obținem că $z \in U\left(\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)$, aşadar $A \cup B \subset U\left(\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)$.

În concluzie, $U\left(\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right) = A \cup B$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{1}{x}, \mathrm{x} \in (0, \infty)$;

b) Din f continuă şi derivabilă obținem f continuă pe $[\mathrm{k}, \mathrm{k}+1]$ şi derivabilă pe (k, k+1) , $\forall k \in (0, \infty)$, putem aplica teorema lui Lagrange pe [k, k+1]şi obținem ca $\exists c \in$ (k, k+1) astfel incat $f'(c) = \ln(k+1) - \ln(k)$. Din $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\ \forall \mathrm{x} \in (0, \infty)$ obținem f' strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ deci din k<c<k+1 avem $f'(k) > f'(c) > f'(k+1)$, adică $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, \forall \mathrm{k} \in (0, \infty)$.

c) Notam $t = nx$ şi avem $dt = ndx$, iar pentru $x = \pi$, t = nπ şi pentru $x = 2\pi$, t = 2nπ, deci $x_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x} dx = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{n} dt = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt, \forall \mathrm{x} \geq 1$;

d) Scriem relatia de la punctual b) pentru k de la n+1 până la 2n.

e) $x_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=n}^{2n+1} I_k$, unde $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$. In I_k facem substituția $t = k\pi + y$ şi obținem $I_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{k\pi + y} dy$;

f) $\frac{\sin y}{k\pi + \pi} \leq \frac{\sin y}{k\pi + y} \leq \frac{\sin y}{k\pi}, \mathrm{y} \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin y dy \leq I_k \leq \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin y dy$, deci $\frac{2}{\pi(k+1)} \leq I_k \leq \frac{2}{\pi \cdot k}$. Prin sumare de la k = n la k = 2n-1 obținem rezultatul.

g) Dacă trecem la limită in d) rezultă:

$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$. Obținem din f) $\lim_{k\to\infty} x_n = \frac{2}{\pi}\ln 2$.